Suites

Définition Une suite numérique réelle $(u_n)_{n \in D_u}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La suite est notée (u_n) ou tout simplement u. *Attention*, l'expression u_n ne désigne pas la suite u, mais seulement son n-ième terme. *Attention* aussi à bien écrire pour ne pas risquer de confondre u_{n+1} et $u_n + 1$...

Une suite peut être définie par :

- son *terme général* (comme une fonction) : le terme de rang n est donné directement en fonction de n.
  ex. $u_n = 2n + 1$ (suite des entiers impairs)
- une expression *récurrente* : un terme est exprimé en fonction du précédent.
  ex. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.

Vocabulaire

- u *croissante* : pour tout n de D_u, $u_{n+1} - u_n \geq 0$
- u *décroissante* : pour tout n de D_u, $u_{n+1} - u_n \leq 0$
- Si u est à termes *strictement* positifs, on peut appliquer le critère (dit « du quotient ») : u croissante (resp. décroissante) $\Leftrightarrow$ pour tout n de D_u, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (resp. < 1)
- u *constante* (ou stationnaire) : pour tout n de D_u, $u_{n+1} - u_n = 0$
- u *monotone* : u croissante *ou* décroissante
- u *majorée* (par M) : pour tout n de D_u, $u_n \leq M$
- u *minorée* (par m) : pour tout n de D_u, $u_n \geq m$
- u *bornée* : u majorée *et* minorée
- u *converge* vers le réel l : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Cela revient à dire que tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux. Une suite non convergente est dite *divergente*.

Suites arithmétiques de raison r

- Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$
- Terme général : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n-1)r$
- Somme de termes consécutifs :

$$(\text{nb de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

- Si a, b, c sont trois nombres en progression arithmétique, alors $2b = a + c$.
- Convergence : une suite arithmétique est toujours divergente (sauf si $r = 0$, bien sûr !)

Suites géométriques de raison q

- Relation de récurrence : $u_{n+1} = qu_n$
- Terme général : $u_n = u_0 q^n$ ou $u_n = u_1 q^{n-1}$
- Somme de termes consécutifs :

$$(\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

- Si a, b, c sont trois nombres en progression géométrique, alors $b^2 = ac$.
- Convergence : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow |q| < 1$

Théorème dit « des gendarmes » Si v converge vers l, si w converge vers l et si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ (les inégalités peuvent être strictes), alors u converge vers l.